Dipartimento di Matematica per le scienze economiche e sociali Università di Bologna

Modelli 1

lezione 9 19 ottobre 2011

σ-algebre misure

professor Daniele Ritelli

www.unibo.it/docenti/daniele.ritelli

σ-algebre di insiemi:

se $X \neq \emptyset$ una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

σ-algebre di insiemi:

se $X \neq \emptyset$ una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

σ-algebre di insiemi:

se $X \neq \emptyset$ una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X si dice σ-algebra se

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$

iii) $(A_n)_n \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Teorema Se $\mathcal{X}$ è una arbitraria collezione di sottoinsiemi di X indicata con $\mathcal{H}$ la famiglia di tutte le σ-algebre in X contenenti $\mathcal{X}$ si ha che

$$\sigma(\mathcal{X}) = \bigcap_{\mathcal{B} \in \mathcal{H}} \mathcal{B}$$

è una σ-algebra, detta σ-algebra generata da $\mathcal{X}$

Se $\mathcal{X}$ è la famiglia degli aperti in $\mathbb{R}$ la σ-algebra $\sigma(\mathcal{X})$ si chiama σ-algebra di Borel e la denotiamo con $\mathcal{B}(\mathbb{R})$

Un elemento di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è detto Boreliano

Se $\mathcal{I}$ è la famiglia di tutti gli intervalli $[a, b)$ con $a < b$ si dimostra che

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Lo stesso vale anche se

$$\mathcal{I} = \{(a, b) \mid a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

$$\mathcal{I} = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{I} = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Misure. Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

Misure. Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

- La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si chiama in tal caso **spazio di misura**

Misure. Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra in X una funzione $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che $\mu(\emptyset) = 0$ e che, se per ogni successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ di insiemi disgiunti tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

si chiama **misura** su $\mathcal{A}$

- La terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si chiama in tal caso **spazio di misura**
- Se $\mu(X) = 1$ la misura μ è detta **misura di probabilità**

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\mu(X) < +\infty$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\mu(X) < +\infty$
- **σ-finita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\mu(X) < +\infty$
- **σ-finita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- **completa** se $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$ e quindi $\mu(B) = 0$

Definizione Una misura μ su una σ-algebra in $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ si dice

- **finita** se $\mu(X) < +\infty$
- **σ-finita** se esiste una successione $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ tale che $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ e $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- **completa** se $A \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, $\mu(A) = 0 \implies B \in \mathcal{A}$ e quindi $\mu(B) = 0$
- **concentrata** su un insieme $A \in \mathcal{A}$ se $\mu(A^c) = 0$. In tale caso si dice che A è un **supporto di μ**

Monotonia di $\boldsymbol{\mu}$

Se $A,\, B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Monotonia di $\boldsymbol{\mu}$

Se A, $B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Dimostrazione $B = (B \setminus A) \cup A$ implica che

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$$

Monotonia di $\boldsymbol{\mu}$

Se A, $B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B$ allora $\mu(A) \leq \mu(B)$

Dimostrazione $B = (B \setminus A) \cup A$ implica che

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$$

Siccome $\mu(B \setminus A) \geq 0$ ne segue che $\mu(B) \geq \mu(A)$

Sottrattività di $\boldsymbol{\mu}$

Se A, $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$ allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Sottrattività di μ

Se A, $B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty$ allora $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Dimostrazione In precedenza abbiamo dimostrato che

$$\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A).$$

Se $\mu(A) < \infty$ allora la tesi segue immediatamente.

Teorema

Se $A,\ B \in \mathcal{A}$ e se $\mu(A \cap B) < \infty$ allora

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ e che

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$$

Teorema

Se $A,\ B \in \mathcal{A}$ e se $\mu(A \cap B) < \infty$ allora

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

Dimostrazione. Osserviamo che $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$ e che

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup B$$

Siccome $\mu(A \cap B) < \infty$ abbiamo

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B)$$

Semi additività di μ

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ allora

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Semi additività di μ

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ allora

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Successioni crescenti di insiemi

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ è una successione crescente di insiemi $A_i \subset A_{i+1}$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Successioni decrescenti di insiemi

Se $(A_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ è una successione decrescente di insiemi $A_{i+1} \subset A_i$ e se $\mu(A_1) < \infty$ allora

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

Esempio Sia $x \in X$. Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

δ_x è una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata misura di Dirac in x.

Esempio Sia $x \in X$. Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

δ_x è una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata misura di Dirac in x.

Si tratta di una misura concentrata sull'insieme $\{x\}$

Esempio Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\mu^{\#}(A) = \begin{cases} \#A & \text{se } A \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \end{cases}$$

$\mu^{\#}$ è una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata **misura del contare**

Esempio Per ogni $A \in \mathcal{P}(X)$ definiamo

$$\mu^{\#}(A) = \begin{cases} \#A & \text{se } A \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \end{cases}$$

$\mu^{\#}$ è una misura su $\mathcal{P}(X)$ chiamata **misura del contare**

Per mezzo della misura del contare si possono interpretare le serie numeriche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ come integrali